

# Análisis Funcional

# Examen XIV



**Los Del DGIIM**, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Análisis Funcional

# Examen XIV

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2026

**Asignatura** Análisis Funcional.

**Curso Académico** 2025-26.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** David Arcoya Álvarez.

**Descripción** Examen Ordinario.

**Fecha** 22 de Enero de 2026.

**Duración** 3 horas.

**Ejercicio 1.** Para  $\alpha \in ]0, 1]$ , sea

$$X = \left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua y } \sup_{x \neq y \in [0, 1]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\}$$

con

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y \in [0, 1]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}, \quad \forall f \in X$$

Prueba que  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach.

**Ejercicio 2.** Sean  $(X, \|\cdot\|_X)$  y  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  dos espacios de Banach y  $T : X \rightarrow Y$  lineal y acotada para la que existe  $c > 0$  tal que

$$\|Tx\|_Y \geq c\|x\|_X, \quad \forall x \in X$$

Prueba que  $T$  es compacto si y solo si  $\dim X < \infty$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $X$  un espacio de Banach reflexivo y  $f : [0, 1] \rightarrow X$  una función continua. Prueba que existe  $x \in X$  tal que

$$\int_0^1 \langle \varphi, f(s) \rangle \, ds = \langle \varphi, x \rangle, \quad \forall \varphi \in X^*$$

**Ejercicio 4. (Teoría)** Sea  $H$  un espacio de Hilbert con producto escalar  $(\cdot, \cdot)$  y norma asociada  $\|\cdot\|$ . Prueba que si  $T : H \rightarrow H$  es lineal, compacto y simétrico tal que

$$\lambda_1 = \sup\{(Tx, x) : \|x\| = 1\} > 0,$$

entonces  $\lambda_1$  es un valor propio de  $T$  y cualquier otro valor propio de  $T$  es menor que  $\lambda_1$ .

**Solución.**

**Ejercicio 1.** Para  $\alpha \in ]0, 1]$ , sea

$$X = \left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua y } \sup_{x \neq y \in [0, 1]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\}$$

con

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y \in [0, 1]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}, \quad \forall f \in X$$

Prueba que  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach.

Comenzaremos primero probando que  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio normado, es decir, probando que  $\|\cdot\|$  es una norma en  $X$ :

- Sean  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $f \in X$  vemos que:

$$\begin{aligned} \|\lambda f\| &= \|\lambda f\|_\infty + \sup_{x \neq y \in [0, 1]} \frac{|\lambda f(x) - \lambda f(y)|}{|x - y|^\alpha} = |\lambda| \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y \in [0, 1]} |\lambda| \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \\ &= |\lambda| \left[ \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y \in [0, 1]} \frac{|\lambda f(x) - \lambda f(y)|}{|x - y|^\alpha} \right] = |\lambda| \|f\| \end{aligned}$$

- Sean  $f, g \in X$  tenemos que:

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \|f + g\|_\infty + \sup_{x \neq y \in [0, 1]} \frac{|(f + g)(x) - (f + g)(y)|}{|x - y|^\alpha} \\ &= \|f + g\|_\infty + \sup_{x \neq y \in [0, 1]} \frac{|f(x) - f(y) + g(x) - g(y)|}{|x - y|^\alpha} \\ &\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \sup_{x \neq y \in [0, 1]} \frac{|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|}{|x - y|^\alpha} \\ &\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \sup_{x \neq y \in [0, 1]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} + \sup_{x \neq y \in [0, 1]} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|^\alpha} = \|f\| + \|g\| \end{aligned}$$

- Finalmente, si tenemos que:

$$0 = \|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y \in [0, 1]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

como  $\|f\|_\infty$ ,  $\sup_{x \neq y \in [0, 1]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \geq 0$  para toda  $f \in X$  deducimos entonces que ambos sumandos son iguales a cero, por lo que en particular  $\|f\|_\infty = 0$ , de donde  $f = 0$ .

**Ejercicio 2.** Sean  $(X, \|\cdot\|_X)$  y  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  dos espacios de Banach y  $T : X \rightarrow Y$  lineal y acotada para la que existe  $c > 0$  tal que

$$\|Tx\|_Y \geq c\|x\|_X, \quad \forall x \in X$$

Prueba que  $T$  es compacto si y solo si  $\dim X < \infty$ .

Por doble implicación (notaremos a ambas normas por  $\|\cdot\|$ ):

$\Leftarrow$ ) Si  $\dim X = N \in \mathbb{N}$  es conocido entonces que existe una isometría lineal sobre-yectiva  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Sea  $A \subset X$  un conjunto acotado, hemos de probar que  $\overline{T(A)}$  es un conjunto compacto para probar que  $T$  es un operador compacto. Como  $T$  es acotada vemos que  $T(A)$  es un conjunto acotado, es decir, existe  $M \geq 0$  tal que  $\|x\| \leq M \quad \forall x \in A$ . Además, si  $x \in \overline{T(A)}$  tenemos entonces existe una sucesión  $\{x_n\}$  de puntos de  $A$  convergente a  $x$ , tendremos que:

$$\|x_n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por lo que también  $\|x\| \leq M$ , de donde  $\overline{T(A)}$  también es un conjunto acotado. Observamos además que  $\overline{T(A)}$  es un conjunto cerrado. De esta forma,  $\Phi(\overline{T(A)}) \subset \mathbb{R}^N$  será también un conjunto cerrado (puesto que  $\Phi$  es un homeomorfismo) y acotado (puesto que  $\Phi$  es isometría), por lo que  $\Phi(\overline{T(A)})$  es un conjunto compacto de  $\mathbb{R}^N$ , de donde:

$$\overline{T(A)} = \Phi^{-1}(\Phi(\overline{T(A)}))$$

es un conjunto acotado, como imagen de un conjunto acotado por una aplicación continua.

$\Rightarrow$ ) Sea  $\{x_n\}$  una sucesión de puntos de  $\overline{B}(0, 1) \subset X$ , tenemos entonces que existe una parcial suya  $\{x_{\sigma(n)}\}$  de forma que  $\{T(x_{\sigma(n)})\}$  es una sucesión convergente, por lo que en particular esta será de Cauchy. Fijado  $\varepsilon > 0$  existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que si  $p, q \in \mathbb{N}$  con  $p, q \geq m$  se tiene que:

$$\|T(x_{\sigma(p)}) - T(x_{\sigma(q)})\| < \varepsilon$$

Si observamos que:

$$\begin{aligned} \|T(x_{\sigma(p)}) - T(x_{\sigma(q)})\| &= \|T(x_{\sigma(p)} - x_{\sigma(q)})\| \geq c\|x_{\sigma(p)} - x_{\sigma(q)}\| = \|cx_{\sigma(p)} - cx_{\sigma(q)}\| \\ &\quad \forall p, q \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Observamos que obtenemos que la sucesión  $\{cx_{\sigma(n)}\}$  es de Cauchy, y por ser  $X$  completo existe  $x \in X$  con  $\{cx_{\sigma(n)}\} \rightarrow x$ . Si usamos ahora que  $c > 0$  vemos que tenemos que  $\{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow \frac{x}{c}$ , y que  $\frac{x}{c} \in \overline{B}(0, 1)$  por ser este un conjunto cerrado.

Hemos probado que toda sucesión de  $\overline{B}(0, 1)$  admite una parcial convergente a un punto del mismo conjunto, es decir, hemos probado que  $\overline{B}(0, 1)$  es secuencialmente compacto, condición equivalente a compacto en un espacio métrico. Finalmente, como:

$$\dim X < \infty \iff \overline{B}(0, 1) \text{ es compacto}$$

concluimos que  $\dim X < \infty$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $X$  un espacio de Banach reflexivo y  $f : [0, 1] \rightarrow X$  una función continua. Prueba que existe  $x \in X$  tal que

$$\int_0^1 \langle \varphi, f(s) \rangle \, ds = \langle \varphi, x \rangle, \quad \forall \varphi \in X^*$$

Definimos  $\chi : X^* \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$\langle \chi, \varphi \rangle = \int_0^1 \langle \varphi, f(s) \rangle \, ds \quad \forall \varphi \in X^*$$

Observamos que es una aplicación lineal, ya que si  $a \in \mathbb{R}$  y  $\varphi, \psi \in X^*$  tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \langle \chi, a\varphi + \psi \rangle &= \int_0^1 \langle a\varphi + \psi, f(s) \rangle \, ds = \int_0^1 (a\langle \varphi, f(s) \rangle + \langle \psi, f(s) \rangle) \, ds \\ &= a \int_0^1 \langle \varphi, f(s) \rangle \, ds + \int_0^1 \langle \psi, f(s) \rangle \, ds = a\langle \chi, \varphi \rangle + \langle \chi, \psi \rangle \end{aligned}$$

Notando por  $\|\cdot\|$  a la norma de  $X$ , para ver que  $\chi$  es continua usaremos que  $\|\cdot\| \circ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación continua de un conjunto compacto en  $\mathbb{R}$ , por lo que existe:

$$|f| := \max\{\|f(s)\| : s \in [0, 1]\}$$

así vemos para cada  $\varphi \in X^*$  que:

$$\begin{aligned} |\langle \chi, \varphi \rangle| &= \left| \int_0^1 \langle \varphi, f(s) \rangle \, ds \right| \leqslant \int_0^1 |\langle \varphi, f(s) \rangle| \, ds \leqslant \int_0^1 \|\varphi\| \|f(s)\| \, ds \\ &= \|\varphi\| \int_0^1 \|f(s)\| \, ds \leqslant \|\varphi\| \int_0^1 |f| \, ds = \|\varphi\| |f| \int_0^1 1 \, ds = \|\varphi\| |f| \end{aligned}$$

por lo que deducimos que  $\chi$  es continua, de donde  $\chi \in X^{**}$ . Como  $X$  es reflexivo tenemos que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} J : & X & \longrightarrow X^{**} \\ & x & \longmapsto Jx \end{array}$$

es sobreyectiva, por lo que para  $\chi \in X^{**}$  existe  $x \in X$  de forma que:

$$\chi = Jx$$

Por lo que en particular tenemos para cada  $\varphi \in X^*$  que:

$$\langle \varphi, x \rangle = \langle Jx, \varphi \rangle = \langle \chi, \varphi \rangle = \int_0^1 \langle \varphi, f(s) \rangle \, ds$$

**Ejercicio 4. (Teoría)** Sea  $H$  un espacio de Hilbert con producto escalar  $(\cdot, \cdot)$  y norma asociada  $\|\cdot\|$ . Prueba que si  $T : H \rightarrow H$  es lineal, compacto y simétrico tal que

$$\lambda_1 = \sup\{(Tx, x) : \|x\| = 1\} > 0,$$

entonces  $\lambda_1$  es un valor propio de  $T$  y cualquier otro valor propio de  $T$  es menor que  $\lambda_1$ .

Consulte los apuntes de teoría.